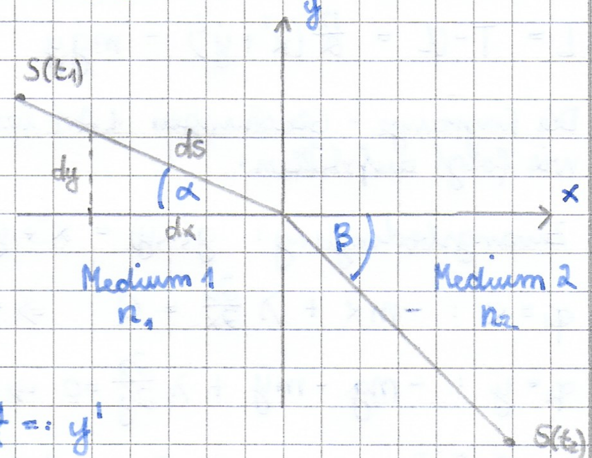
9. Tutorium – Theoretische Mechanik

① Fermat'sches Prinzip und Brechungsgesetz

Das „Fermatsche Prinzip" besagt, dass ein Lichtstrahl bei gegebenem Anfangs- und Endpunkt denjenigen Weg einschlägt, der die kürzeste Zeit beansprucht.

Wir leiten daraus das Snellsche Brechungsgesetz her:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt$$



Da sich Licht in einem Medium geradlinig gleichförmig bewegt, gilt:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{mit } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{v}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$= \frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{mit } \frac{dy}{dx} =: y'$$

$$= \frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Für das Zeitintegral folgt nun:

$$T = \int_{S(t_1)}^{S(t_2)} \underbrace{\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}}_{= f(y,y',x)}\, dx$$

Wir wollen die Gesamtzeit minimieren, also wenden wir analog die Euler-Lagrange Gleichung an.

$$S = \int L(x,\dot{x},t)\,dt \quad \text{Hamiltonsches Prinzip} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

$$T = \int f(y,y',x)\,dx \quad \text{Fermat} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.} \qquad (1)$$

Dieses Ergebnis gilt für alle v und y' entlang des Pfades. Die Gleichung liefert immer den selben konstanten Wert.

Medium 1: $y' = y_1' = \frac{dy_1}{dx_1} = -\tan\alpha$

Medium 2: $y' = y_2' = \frac{dy_2}{dx_2} = -\tan\beta$

Die Geschwindigkeit im Medium ergibt sich als Quotient aus Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und Brechzahl.

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow v_1 = \frac{c}{n_1} \qquad v_2 = \frac{c}{n_2}$$

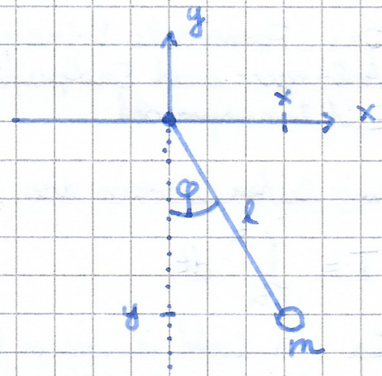
$$\frac{1}{v_1}\frac{y_1'}{\sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{y_2'}{\sqrt{1+y_2'^2}} \Rightarrow \frac{n_1}{c}\underbrace{\frac{-\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}_{=-\sin\alpha} = \frac{n_2}{c}\underbrace{\frac{-\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}}_{=-\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}}$$

② Lagrange II. Art – Das mathematische Pendel

Wir wählen unsere generalisierten Koordinaten so, dass sie automatisch die Zwangsbedingung berücksichtigen. Dann nehmen die Euler-Lagrange-Gleichungen folgende Form an:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \qquad \forall q_i$$



$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \qquad U = m \cdot g \cdot y$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lassen sich wie folgt aufstellen:

Zwangsbedingung: $g(x,y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$

$$q_1 = x : \quad -m\ddot{x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow -m\ddot{x} + 2\lambda x = 0$$

$$q_2 = y : \quad -mg - m\ddot{y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow -mg - m\ddot{y} + 2\lambda y = 0$$

Durch Differenzieren der Zwangsbedingung ergibt sich ein Ergebnis für λ, woraus sich die Bewegungsgleichung ergibt.
Geht das nicht auch leichter? JA

Die Zwangsbedingung reduziert das Problem auf eine Dimension. Es zeigt sich, dass der Winkel φ die Bewegung eindeutig bestimmt:

$$x = \sin\varphi \cdot l \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \cos\varphi \, l \, \dot{\varphi}$$
$$y = -\cos\varphi \cdot l \quad \Rightarrow \quad \dot{y} = \sin\varphi \, l \, \dot{\varphi}$$

$$T = \frac{m}{2}\left((\cos\varphi \, l \dot{\varphi})^2 + (\sin\varphi \, l \dot{\varphi})^2\right) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}$$

$$L = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \, l$$

$$\Rightarrow \quad -mg\sin\varphi \, l - \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad ml^2\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \, l$$

$$\underline{\underline{\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi}}$$

Durch Entwicklung von $\sin\varphi = \varphi + \mathcal{O}(\varphi^3)$ ergibt sich für kleine Winkel die bekannte Gleichung:

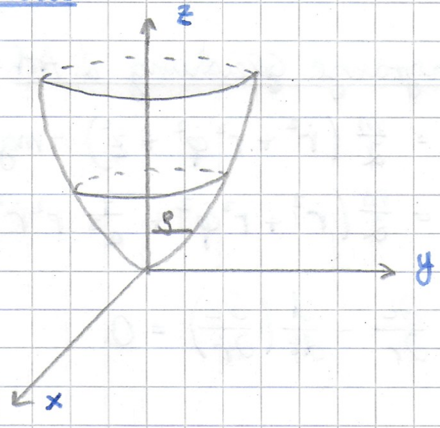
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ folgt mit $T = \frac{2\pi}{\omega}$ für die Periodendauer des Pendels:

$$\underline{\underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}}$$

9. Tutorium - Theoretische Mechanik

③ Lagrange I und II. Rotationsparaboloid



Paraboloid: $az = x^2 + y^2$

Zwangsbedingung: $g = x^2 + y^2 - az = 0$

Übergang zu Zylinderkoordinaten r, φ, z

$$x = r\cos\varphi \qquad \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$U = mgz$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\left((\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right)$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi} + r^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi} + r^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$
$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + \dot{z}^2\right)$$
$$= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

Lagrange-Gleichung 1. Art: $g = r^2 - az$

Gradient in Zylinderkoordinaten: $\operatorname{grad} g = \frac{\partial g}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \varphi}e_\varphi + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{e}_z$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2r \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

$q_1 = r$: $\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) + \lambda(\vec{\nabla}g)_r = 0$

$$mr\dot{\varphi}^2 - m\ddot{r} + \lambda 2r = 0 \quad (1)$$

$q_2 = \varphi$: $\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) + \lambda(\vec{\nabla}g)_\varphi = 0$

$$-\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = -2mr\dot{r}\dot{\varphi} - mr^2\ddot{\varphi} = 0 \quad (2)$$

$q_3 = z$: $\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \lambda(\vec{\nabla}g)_z = 0$

$$-mg - m\ddot{z} - \lambda a = 0 \quad (3)$$

(3): $\lambda = -\frac{m}{a}(g + \ddot{z})$

Zweimaliges Differenzieren der Zwangsbedingung: $z = \frac{r^2}{a}$

$$\dot{z}(t) = \frac{2r}{a}\dot{r} \qquad \ddot{z}(t) = \frac{2}{a}(\dot{r}^2 + r\ddot{r})$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{m}{a}\left(g + \frac{2}{a}(\dot{r}^2 + r\ddot{r})\right) = -\frac{m}{a^2}(g + 2\dot{r}^2 + 2r\ddot{r})$$

λ in (1) einsetzen: $\quad m r\dot{\varphi}^2 - m\ddot{r} - \frac{2rm}{a^2}\left(ag + 2\dot{r}^2 + 2r\ddot{r}\right) = 0$

$$\Rightarrow -\ddot{r} + r\left[\dot{\varphi}^2 - \frac{2}{a^2}\left(ag + 2\dot{r}^2 + 2r\ddot{r}\right)\right] = 0$$

<u>Lagrange Gleichung 2. Art:</u> $\quad z = \frac{r^2}{a} \quad \dot{z} = 2\frac{r}{a}\dot{r}$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{a^2}r^2\dot{r}^2\right) - mg\frac{r^2}{a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = \cancel{m}r\dot{\varphi}^2 + 4\cancel{m}\,r\frac{\dot{r}^2}{a^2} - 2\cancel{m}g\frac{r}{a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \cancel{m}\dot{r} + 4\cancel{m}\dot{r}\frac{r^2}{a^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = \cancel{m}\ddot{r} + 8\cancel{m}\dot{r}^2\frac{r}{a^2} + 4\cancel{m}\ddot{r}\frac{r^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow r\dot{\varphi}^2 + r4\frac{\dot{r}^2}{a^2} - 2g\frac{r}{a} - \ddot{r} - 8\dot{r}^2\frac{r}{a^2} - 4\ddot{r}\frac{r^2}{a^2} = 0$$

$$-\ddot{r} + \left[-\frac{2g}{a} + 4\dot{r}\frac{1}{a^2} - 8\dot{r}^2\frac{1}{a^2} + \dot{\varphi}^2 - 4\ddot{r}\frac{r}{a^2}\right]r = 0$$

$$-\ddot{r} + r\left[\dot{\varphi}^2 - \frac{2}{a^2}\left(ag + 2\dot{r}^2 + 2r\ddot{r}\right)\right] = 0$$